Thm: V DVR, mixed char., residue fld. $= k$, quotient fld. $= K$.

$t_1, \ldots, t_r \in V$ s.t. $t_i \mapsto \bar{t}_i \in k$ とすると,

$k / k_0(\underbrace{\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_r}_{\text{不定元}})$ fin., separable; k_0 perfect

$L/K < \infty$

$K_n := K(\mu_{p^{n+c}}, t_1^{\frac{1}{p^{n+c}}}, \ldots, t_r^{\frac{1}{p^{n+c}}})$, ($c =$ constant $\in \mathbb{N}_{\geq 1}$ は後で選ぶ)

$L_n := L \cdot K_n$

$K_\infty := \bigcup_n K_n$, $L_\infty := \bigcup L_n$

$$\left.\begin{matrix} W \\ V_n \\ W_n \\ V_\infty \\ W_\infty \end{matrix}\right\} \text{は } V \text{ の } \left\{\begin{matrix} L \\ K_n \\ L_n \\ K_\infty \\ L_\infty \end{matrix}\right\} \text{内の normalization}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{W_\infty / V_\infty \text{ は almost étale.}}$

Proof: ① $V' := V[t_1^{1/p^\infty}, \ldots, t_r^{1/p^\infty}]$: DVR, mixed char., res. fld <u>perfect</u>

$\Downarrow$

$V \rightsquigarrow V'$ によって $\boxed{k = k_0,\ r = 0}$ としてもよい

$\rightsquigarrow (V')^\wedge$ によって $\boxed{V \text{ complete}}$ としてもよい

(以下ではそのように仮定する)

---

② <u>Lemma</u>: $\Omega_{W/V} \cong W/p^{\delta}W$ （p^{δ}: $\mathrm{ord}(-) = \delta\cdot\mathrm{ord}(p)$ となるような元。$\delta \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$）

しかも、$p^{\delta}\cdot W$ = 'different'

<u>Pf</u>: π_W : W の uniformizer とすると、 $W \cong V[\pi_W] \cong V[X]/(f(X))$ （cf. ①と仮定）

$$\Rightarrow \Omega_{W/V} \cong (W\cdot dX)/(f'(X)dX) \cong \text{'}W/p^{\delta}W\text{'}$$

……「$p^{\delta}W$ = 'different'」はよく知られている (cf. Serre, Local Fields) //

（cを十分大きくとれば）

③ <u>Claim</u>: $\forall n$ 十分大、 $\boxed{\Omega_{W_{n+1}/V_{n+1}} \xrightarrow{\sim} \Omega_{W_{n+1}/(W_n\otimes_{V_n}V_{n+1})}}$

<u>Pf</u>:

$$\begin{tikzcd}
 & W_{n+1} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
W_n \arrow[r, dotted, dash] \arrow[dr, dash] & W_n\otimes_{V_n}V_{n+1} \arrow[r, dashed, dash] & V_{n+1} \arrow[dl, dash] \\
 & V_n &
\end{tikzcd}$$

一般論より、

$$\begin{tikzcd}
\Omega_{(W_n\otimes_{V_n}V_{n+1})/V_{n+1}} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & \Omega_{W_{n+1}/V_{n+1}} \arrow[r, "\psi"] & \Omega_{W_{n+1}/(W_n\otimes_{V_n}V_{n+1})} \arrow[r] & 0 \\
(\Omega_{W_n/V_n})\otimes_{V_n}V_{n+1} & & &
\end{tikzcd}$$

は完全。

一方、（②を $W_{n+1}, V_{n+1}, W_n, V_n$ 等に適用すると）

$$\Omega_{W_{n+1}/V_n} \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{c} \Omega_{V_{n+1}/V_n}\otimes_{V_{n+1}}W_{n+1} \\ \wr\wr \\ W_{n+1}/p^{c}W_{n+1} \end{array} \right. \supseteq \left\{ \begin{array}{c} \Omega_{W_n/V_n}\otimes_{W_n}W_{n+1} \\ \wr\wr \\ W_{n+1}/p^{\delta_n}W_{n+1} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

と書く。

（∵）$\delta \geq \dots \geq \delta_{n+1} \geq \delta_n$ （簡単な演習問題）cf. ④
従って $c \geq \delta$ となるように c をとればよい ） $\Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow \psi$ は $\xrightarrow{\sim}$ //

④ <u>Claim</u>: $(p^{\delta_n - \delta_{n+1}}) \cdot W_{n+1} \subseteq W_n \otimes_{V_n} V_{n+1} \quad (\subseteq W_{n+1})$

<u>Pf</u>: $\underbrace{p^{-\delta_{n+1}} \cdot W_{n+1}}_{\overset{\shortparallel}{M}} \subseteq \underbrace{p^{-\delta_n} \cdot (W_n \otimes_{V_n} V_{n+1})}_{\overset{\shortparallel}{N}}$ を示せばよい。

一方，(different の Tr. 系の定義より) $Tr := Tr_{L_{n+1}/K_{n+1}}$ とおくと，

$$Tr\left((W_n \otimes_{V_n} V_{n+1}) \cdot M\right) \subseteq Tr(W_{n+1} \cdot M) \subseteq V_{n+1}$$

(V_{n+1}/V_n flat 故)

$$\Rightarrow M \subseteq N \quad //$$

---

⑤ <u>Lemma</u>: $A \subseteq B \subseteq C$ commutative rings, $\ni 1$; B, C : A-flat

$\gamma \in C$ s.t. $\gamma \cdot C \subseteq B$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\gamma^2 \cdot \Omega_{C/B} = 0}$$

<u>Pf</u>:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & I_B & \to & B \otimes_A B & \to & B & \to & 0 \\ & & \cap & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & I_C & \to & C \otimes_A C & \to & C & \to & 0 \end{array} \quad \Big\} \text{ exact}$$

$\Rightarrow (\gamma \otimes \gamma)(C \otimes_A C) \subseteq B \otimes_A B$, $I_C \cap (B \otimes_A B) = I_B$ より

$$\boxed{(\gamma \otimes \gamma) \cdot I_C \subseteq I_B}$$

$\Rightarrow C \otimes_A (I_B/I_B^2) \to I_C/I_C^2 \to \Omega_{C/B}$ (exact：一般論)

$$\begin{array}{ccc} C \otimes_A (I_B/I_B^2) & & I_C/I_C^2 \\ \wr\wr & & \wr\wr \\ C \otimes_A (\Omega_{B/A}) & & \Omega_{C/A} \end{array}$$

より，$\Omega_{C/B} \cong I_C/(I_C^2 + C \cdot I_B)$

$\Rightarrow (\gamma \otimes \gamma) \cdot (I_C/I_C^2 + C \cdot I_B) = \gamma^2 \cdot (I_C/I_C^2 + C \cdot I_B) = 0 \quad //$

⑥ ④を⑤に代入 $\Rightarrow$ $p^{2(\delta_n-\delta_{n+1})}\cdot\Omega_{W_{n+1}/(W_n\otimes_{V_n}V_{n+1})}=0$

$\Rightarrow$ (③より)

$$p^{2(\delta_n-\delta_{n+1})}\cdot\underbrace{\Omega_{W_{n+1}/V_{n+1}}}_{\cong\ W_{n+1}/p^{\delta_{n+1}}W_{n+1}}=0.$$

$$\Rightarrow\ \delta_{n+1}\leq 2(\delta_n-\delta_{n+1})$$

$$\Rightarrow\ 3\delta_{n+1}\leq 2\delta_n$$

$$\Rightarrow\ \delta_{n+1}\leq\frac{2}{3}\delta_n$$

$$\Rightarrow\ \boxed{\lim_{n\to\infty}\delta_n=0.}$$

……つまり、 $\boxed{W_\infty/V_\infty \text{ は almost étale}}$